ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2024

Определим функцию $L(x) = \ln\ln x$ при $\ln x \geqslant e$ и $L(x) = 1$ при $\ln x < e$. Для каждого $n \geqslant 1$ положим $a_n = \sqrt{2nL(n)}$.

Лемма 5.3

Функция $b(x) = x/L(x)$ — непрерывная, неограниченная и строго возрастающая в области $x > 0$.

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Непрерывность и неограниченность функции $b(x)$ очевидна. Докажем, что $b(x)$ строго возрастает при $x > 0$. Пусть $0 < x < y$ и $\ln x \geqslant e$. Так как $\ln x \leqslant x - 1$, $x > 0$, и

$$x - 1 + y = xy - (x-1)(y-1) < xy$$

при $x, y > 1$, то

$$\begin{aligned} L(y) &= L\left(\frac{y}{x}x\right) = \ln(\ln(y/x) + \ln x) \leqslant \ln(y/x - 1 + \ln x) < \\ &< \ln\left(\frac{y}{x}\ln x\right) = L(x) + \ln(y/x) \leqslant L(x) + y/x - 1 \leqslant \frac{y}{x}L(x), \end{aligned}$$

откуда следует, что $b(x) = x/L(x) < y/L(y) = b(y)$.

Доказательство

Если $0 < x < y$ и $\ln y \leqslant e$, то неравенство $b(x) < b(y)$ очевидно. Если $0 < x < y$ и $\ln x < e < \ln y$, то, положив $y_0 = e^e$, по уже доказанному получаем

$$b(x) = x < y_0 = b(y_0) < b(y).$$

$\square$

Лемма 5.4

Существует постоянная $C > 0$ *такая, что для всех* $n \geqslant 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant C\,\frac{n}{a_n}, \tag{5.7}$$

где $a_n = \sqrt{2nL(n)}$ *и* $L(n) = \max\{1, \ln\ln n\}$.

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Покажем, что для всех $n \geqslant 16$

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} < 1 + \frac{1}{2n}. \tag{5.8}$$

Из неравенства $1 + x < e^x$ имеем $(y + x)/x = 1 + y/x < e^{y/x}$, откуда получаем

$$\ln(x + y) < \ln x + y/x \tag{5.9}$$

для всех $x, y > 0$.

Доказательство

В частности, $\ln(n+1) < \ln n + 1/n$, и, ещё раз применяя неравенство (5.9),

$$\ln\ln(n+1) < \ln(\ln n + 1/n) < \ln\ln n + 1/(n\ln n). \tag{5.10}$$

Пусть $n \geqslant 16 > e^e$, тогда $\ln n > e > 2$, $L(n) \geqslant 1$, и из (5.10) получаем

$$\frac{L(n+1)}{L(n)} = \frac{\ln\ln(n+1)}{\ln\ln n} < 1 + \frac{1}{nL(n)\ln n} < 1 + \frac{1}{2n}.$$

Доказательство

Приступим к доказательству (5.7). Пусть $n \geqslant 16$. Тогда из (5.8) с помощью хорошо известного неравенства $(1 + 1/n)^{1/2} < 1 + 1/(2n)$ приходим к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= (1+1/n)^{1/2}\left(\frac{L(n+1)}{L(n)}\right)^{1/2} < \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/2} < \\ &< \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{4n}\right) = 1+\frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8n}\right) < 1+\frac{7}{8n}. \end{aligned}$$

Доказательство

Допустим, что неравенство (5.7) справедливо для некоторого $n \geqslant 16$. Тогда для любой постоянной $C \geqslant 8$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i} \leqslant C\frac{n}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} < C\frac{n}{a_{n+1}}\left(1 + \frac{7}{8n}\right) + \frac{1}{a_{n+1}} \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{n}{a_{n+1}}(1 + (1 - 1/C)/n) + \frac{1}{a_{n+1}} = C\frac{n+1}{a_{n+1}},$$

откуда следует справедливость (5.7) для любого $n \geqslant 16$.
Если $n < 16$, то справедливость (5.7) можно добиться выбором постоянной $C \geqslant 8$. □

Лемма 5.5

Пусть $\lambda > 1$ *и* $n_k = [\lambda^k]$. *Тогда последовательность* $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ *удовлетворяет следующим свойствам:* $n_k \uparrow \infty$ *при* $k \to \infty$, *существует* $k_0 \geqslant 1$ *такое, что*

$$a_{n_{k+1}} < \lambda a_{n_k} \tag{5.11}$$

для всех $k \geqslant k_0$, *и*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (\ln n_k)^{-\alpha} < \infty \tag{5.12}$$

для любого $\alpha > 1$.

Доказательство

Из определения n_k следует, что $n_k \leqslant \lambda^k < n_k + 1$ и найдётся положительная постоянная c_λ такая, что $n_k > \lambda^k - 1 \geqslant c_\lambda \lambda^k$ для всех $k \geqslant 1$ (в качестве c_λ можно взять любое положительное число, меньшее $1 - 1/\lambda$). Отсюда следует, что $n_k \uparrow \infty$ и

$$\ln n_k > \ln c_\lambda + k \ln \lambda > \frac{k \ln \lambda}{2}$$

для всех достаточно больших k. Таким образом, существует $k_1 \geqslant 1$ такое, что для любого $\alpha > 1$

$$\sum_{k=k_1}^{\infty} (\ln n_k)^{-\alpha} \leqslant (2/\ln \lambda)^{\alpha} \sum_{k=k_1}^{\infty} k^{-\alpha} < \infty.$$

Доказательство

Из определения n_k вытекает, что $n_k \sim \lambda^k$ при $k \to \infty$.
Отсюда следует, что $\ln n_k \sim \ln \lambda^k$ и $L(n_k) \sim L(\lambda^k)$ при $k \to \infty$.
Также заметим, что $L(\lambda^{k+1})/L(\lambda^k) \to 1$ при $k \to \infty$.
Следовательно, $a_{n_{k+1}}/a_{n_k} \to \sqrt{\lambda} < \lambda$ при $k \to \infty$, т. е. $a_{n_{k+1}} < \lambda a_{n_k}$ для всех достаточно больших k. $\square$

Вспомогательные утверждения

Лемма 5.6

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин. Если* $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$ *и для некоторых* $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $c > 0$ *и* $n_0 \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(|S_n/a_n| \geqslant \beta) \leqslant c\, e^{-\alpha L(n)} \tag{5.13}$$

для всех $n \geqslant n_0$, *то*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} \leqslant \beta \quad \text{п. н.} \tag{5.14}$$

Доказательство

Утверждение (5.14) равносильно тому, что

$$\mathsf{P}(|S_n/a_n| \geqslant \lambda\beta + \varepsilon \text{ для бесконечно многих } n) = 0 \tag{5.15}$$

для всех $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 1$.
Для доказательства (5.15) достаточно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} |S_n/a_n| \geqslant \lambda\beta + \varepsilon) < \infty. \tag{5.16}$$

Доказательство

Так как $S_n/a_n \xrightarrow{P} 0$, то $\mathsf{P}(|S_n/a_n| < \varepsilon/(2\lambda)) \geqslant 3/4$ для всех достаточно больших n. Из (5.11) получаем

$$|S_n/a_{n_k}| \leqslant \lambda |S_n/a_{n_{k+1}}| \leqslant \lambda |S_n/a_n|,$$

откуда следует, что

$$\mathsf{P}(|S_n/a_{n_k}| < \varepsilon/2) \geqslant \mathsf{P}(|S_n/a_n| < \varepsilon/(2\lambda)) \geqslant 3/4$$

для всех n, $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, и всех достаточно больших k. Следовательно,

$$\mathsf{P}(|S_{n_{k+1}}/a_{n_k}| < \varepsilon/2) \geqslant 3/4$$

для всех достаточно больших k.

Доказательство

Так как

$$\left\{|S_n/a_{n_k}| < \varepsilon/2\right\} \bigcap \left\{|S_{n_{k+1}}/a_{n_k}| < \varepsilon/2\right\} \subseteq \left\{|S_{n_{k+1}}/a_{n_k} - S_n/a_{n_k}| < \varepsilon\right\},$$

то из элементарного неравенства

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cup B) \geqslant \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - 1$$

получаем

$$\mathsf{P}\Big(|S_{n_{k+1}}/a_{n_k} - S_n/a_{n_k}| < \varepsilon\Big) \geqslant 1/2 \tag{5.17}$$

для всех n, $n_k < n \leqslant n_{k+1}$, и всех достаточно больших k.

Доказательство

Из неравенства (2.22) нетрудно получить, что для всех $u, v > 0$

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant u+v) \leqslant \frac{\mathsf{P}(|S_n| \geqslant u)}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \mathsf{P}(|S_n - S_k| < v)}. \tag{5.18}$$

Тогда, принимая во внимание оценку (5.17), из (5.18) получаем

$$\mathsf{P}(\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} |S_n/a_{n_k}| \geqslant \lambda\beta+\varepsilon) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_{n_{k+1}}/a_{n_k}| \geqslant \lambda\beta). \tag{5.19}$$

Учитывая (5.11), получим для всех достаточно больших k

$$|S_{n_{k+1}}/a_{n_k}| = \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} |S_{n_{k+1}}/a_{n_{k+1}}| \leqslant \lambda |S_{n_{k+1}}/a_{n_{k+1}}|.$$

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Теперь из (5.13) и (5.19) окончательно получаем

$$\mathsf{P}\Big(\max_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} |S_n/a_{n_k}| \geqslant \lambda\beta+\varepsilon\Big) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_{n_{k+1}}/a_{n_{k+1}}| \geqslant \beta) \leqslant 2c\, e^{-\alpha L(n_{k+1})}.$$

Заметим, что $e^{-\alpha L(n_k)} = (\ln n_k)^{-\alpha}$. Как было показано в лемме 5.5, ряд $\sum\limits_{k=k_1}^{\infty} (\ln n_k)^{-\alpha}$ сходится. Следовательно, имеет место (5.16), т. е. соотношение (5.14) доказано. □

Лемма 5.7

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин таких, что* $\mathsf{E}X_n = 0$ *и* $\sup\limits_{n\geqslant 1}\mathsf{E}X_n^2 < \infty$. *Если* $|X_n| \leqslant \tau(n/L(n))^{1/2}$ *п. н. для некоторого* $\tau > 0$ *и всех* $n \geqslant 1$, *то для всех* $x > 0$, $a \geqslant (\sup\limits_{n\geqslant 1}\mathsf{E}X_n^2)^{1/2}$ *и* $n \geqslant 1$

$$\mathsf{P}(S_n/a_n \geqslant x) \leqslant \exp\left\{ -\left(\frac{x}{a}\right)^2 L(n)\left(2 - e^{\sqrt{2}x\tau/a^2}\right)\right\}. \tag{5.20}$$

Доказательство

Так как функция $x/L(x)$ возрастает, то для всех $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\frac{|X_j|}{a_n} \leqslant \frac{\tau}{a_n}\left(\frac{j}{L(j)}\right)^{1/2} \leqslant \frac{\tau}{a_n}\left(\frac{n}{L(n)}\right)^{1/2} = \frac{\tau}{\sqrt{2}\,L(n)} \quad \text{п. н.} \tag{5.21}$$

Положим $f(x) = e^x - 1 - x$. Так как $e^{zx} \leqslant e^{|x|}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $|z| \leqslant 1$, то из соотношения (2.7) следует, что для всех $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|}. \tag{5.22}$$

Следовательно, из (5.21) и (5.22) имеем для всех $\lambda > 0$

$$\exp\{\lambda X_j/a_n\} \leqslant 1 + \lambda\,\frac{X_j}{a_n} + \frac{\lambda^2 X_j^2}{2a_n^2}\,\exp\{\lambda\tau/(\sqrt{2}\,L(n))\} \quad \text{п. н.}$$

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Так как $\mathsf{E}X_j = 0$, $\mathsf{E}X_j^2 \leqslant a^2$ и $1 + x \leqslant e^x$, то

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\exp\{\lambda X_j/a_n\} &\leqslant 1 + \frac{\lambda^2 a^2}{2a_n^2}\exp\{\lambda\tau/(\sqrt{2}\,L(n))\} \leqslant \\
&\leqslant \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2a_n^2}\exp\{\lambda\tau/(\sqrt{2}\,L(n))\}\right\} = \\
&= \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{4nL(n)}\exp\{\lambda\tau/(\sqrt{2}\,L(n))\}\right\}.
\end{aligned}$$

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Теперь из экспоненциального неравенства Чебышева (1.4) получаем для всех $\lambda > 0$ и $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n/a_n \geqslant x) &\leqslant e^{-\lambda x}\mathsf{E}e^{\lambda S_n/a_n} = e^{-\lambda x}\prod_{j=1}^{n}\mathsf{E}e^{\lambda X_j/a_n} = \\ &= \exp\left\{-\lambda x + \frac{\lambda^2 a^2}{4L(n)}\exp\{\lambda\tau/(\sqrt{2}\,L(n))\}\right\}. \end{aligned}$$

Положив в правой части последнего неравенства $\lambda = 2xL(n)/a^2$, получим (5.20). □

Вспомогательные утверждения

Лемма 5.8

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с* $\mathsf{E}X_1^2 < \infty$. *Тогда для любого* $\tau > 0$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n} X_j I(|X_j| \geqslant \tau(j/L(j))^{1/2}) \to 0 \quad \text{п. н.} \tag{5.23}$$

Доказательство

Положим $Z_n = X_n I(|X_n| \geqslant \tau(n/L(n))^{1/2})$.
Для доказательства леммы достаточно показать, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|Z_n|/a_n$, поскольку отсюда следует сходимость с вероятностью 1 ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Z_n/a_n$ и, в силу леммы Кронекера 3.11, соотношение (5.23).

Доказательство

Обозначим $b_n = b^{1/2}(n) = (n/L(n))^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|Z_n|/a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} \mathsf{E}(|X_n| I(|X_n| \geqslant \tau b_n)) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} \mathsf{E}(|X_n| I(\tau b_j \leqslant |X_n| \leqslant \tau b_{j+1})) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} \tau b_{j+1} \mathsf{P}(\tau b_j \leqslant |X_1| \leqslant \tau b_{j+1}) = \\
&= \tau \sum_{j=1}^{\infty} b_{j+1} \mathsf{P}(\tau b_j \leqslant |X_1| \leqslant \tau b_{j+1}) \sum_{n=1}^{j} a_n^{-1}. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

Доказательство

В силу леммы 5.4 существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $j \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{j} a_n^{-1} \leqslant C\,\frac{j}{a_j} = \frac{C}{\sqrt{2}}\,b_j.$$

Далее, в силу леммы 5.3 имеем

$$\frac{b_{j+1}}{b_j} = \Big(\frac{j+1}{j}\,\frac{L(j)}{L(j+1)}\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\frac{j+1}{j}\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{2},$$

т. е. $b_{j+1} \leqslant \sqrt{2}\,b_j$ для всех $j \geqslant 1$.

Доказательство

Подставляя последние оценки в (5.24), получаем:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}|Z_n|/a_n &\leqslant \frac{C\tau}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} b_j b_{j+1} \mathsf{P}(\tau b_j \leqslant |X_1| \leqslant \tau b_{j+1}) \leqslant \\
&\leqslant \frac{C}{\tau} \sum_{j=1}^{\infty} (\tau b_j)^2 \mathsf{P}(\tau b_j \leqslant |X_1| \leqslant \tau b_{j+1}) \leqslant \\
&\leqslant \frac{C}{\tau} \sum_{j=1}^{\infty} \mathsf{E}(X_1^2 I(\tau b_j \leqslant |X_1| \leqslant \tau b_{j+1})) = \\
&= \frac{C}{\tau} \mathsf{E}(X_1^2 I(|X_1| \geqslant \tau b_1)) \leqslant \frac{C}{\tau} \mathsf{E} X_1^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

□

Лемма 5.9

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathsf{E}X_1^2 = 1$. *Пусть целочисленные последовательности* $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 1}$ *и* $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ *таковы, что*

$$0 < \alpha_n \uparrow \infty, \quad 1 \leqslant m_n \uparrow \infty, \quad \frac{\alpha_n}{m_n} \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{m_n}{\alpha_n^2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тогда для всех $\varepsilon > 0$ *и* $b \in \mathbb{R}$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{m_n}{\alpha_n^2} \ln \mathsf{P}(|S_{m_n}/\alpha_n - b| < \varepsilon) \geqslant -b^2/2. \qquad (5.25)$$

Доказательство

Пусть $x > 0$. Для каждого $n \geqslant 1$ положим

$$p_n = \left[\frac{m_n^2 x^2}{\alpha_n^2}\right], \quad q_n = \left[\frac{\alpha_n^2}{m_n x^2}\right], \quad r_n = \frac{\alpha_n}{x q_n}.$$

Заметим, что при $n \to \infty$

$$p_n \sim r_n^2, \quad p_n q_n \sim m_n, \quad \frac{q_n m_n}{\alpha_n^2} \sim \frac{1}{x^2}. \tag{5.26}$$

Доказательство

Пусть $\delta > 0$ и $-\infty < c + \delta < d - \delta < \infty$. Тогда

$$\left(\mathsf{P}\left(x(c+\delta) < \frac{S_{p_n}}{r_n} < x(d-\delta)\right)\right)^{q_n} =$$

$$= \prod_{j=0}^{q_n-1} \mathsf{P}\left(x(c+\delta) < \frac{S_{(j+1)p_n} - S_{jp_n}}{r_n} < x(d-\delta)\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{q_n-1} \left\{x(c+\delta) < \frac{S_{(j+1)p_n} - S_{jp_n}}{r_n} < x(d-\delta)\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(xq_n(c+\delta) < \frac{S_{p_n q_n}}{r_n} < xq_n(d-\delta)\right) = \mathsf{P}\left(c+\delta < \frac{S_{p_n q_n}}{\alpha_n} < d-\delta\right)$$

Вспомогательные утверждения

Доказательство

и

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}\left((c+\delta) < \frac{S_{p_n q_n}}{\alpha_n} < (d-\delta)\right)\mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{m_n} - S_{p_n q_n}}{\alpha_n}\right| < \delta\right) = \\
= \quad &\mathsf{P}\left(\left\{(c+\delta) < \frac{S_{p_n q_n}}{\alpha_n} < (d-\delta)\right\} \cap \left\{\left|\frac{S_{m_n} - S_{p_n q_n}}{\alpha_n}\right| < \delta\right\}\right) \leqslant \\
\leqslant \quad &\mathsf{P}\left(c < \frac{S_{m_n}}{\alpha_n} < d\right).
\end{aligned}
$$

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Отсюда, обозначив $\lambda_n = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_{m_n} - S_{p_n q_n}}{\alpha_n}\right| \geqslant \delta\right)$, получаем

$$\ln \mathsf{P}\left(c < \frac{S_{m_n}}{\alpha_n} < d\right) \geqslant \ln(1 - \lambda_n) + q_n \ln \mathsf{P}\left(x(c+\delta) < \frac{S_{p_n}}{r_n} < x(d-\delta)\right). \tag{5.27}$$

Доказательство

Из определения p_n и q_n следует, что $p_n q_n \leqslant m_n$, т. е. $S_{m_n} - S_{p_n q_n}$ есть сумма не более чем m_n независимых и одинаково распределённых случайных величин X_j.
Следовательно, из неравенства Чебышева (1.3) имеем:

$$\lambda_n \leqslant \frac{\mathsf{D}(S_{m_n} - S_{p_n q_n})}{\delta^2 \alpha_n^2} \leqslant \frac{m_n}{\delta^2 \alpha_n^2} \to 0.$$

Доказательство

Как хорошо известно из классического курса теории вероятностей, любая последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин с конечной ненулевой дисперсией удовлетворяет *центральной предельной теореме*, что в нашем случае ($\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^2 = 1$) означает сходимость

$$\mathsf{P}(c < S_n/\sqrt{n} < d) \to \mathsf{P}(c < Z < d)$$

для любых $c < d$, где случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение.

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Так как $r_n \sim \sqrt{p_n}$ в силу (5.26), то для любых $c < d$

$$\mathsf{P}\left(c < \frac{S_{p_n}}{r_n} < d\right) = \mathsf{P}\left(\frac{c\,r_n}{\sqrt{p_n}} < \frac{S_{p_n}}{\sqrt{p_n}} < \frac{d\,r_n}{\sqrt{p_n}}\right) \to \mathsf{P}(c < Z < d).$$

Таким образом, из (5.27) получаем

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \frac{m_n}{\alpha_n^2} \ln \mathsf{P}\left(c < \frac{S_{m_n}}{\alpha_n} < d\right) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{m_n}{\alpha_n^2} \ln(1-\lambda_n) + \\
+ \quad &\liminf_{n\to\infty} \frac{q_n m_n}{\alpha_n^2} \ln \mathsf{P}\left(x(c+\delta) < \frac{S_{p_n}}{r_n} < x(d-\delta)\right) = \\
= \quad &\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{x^2} \ln \mathsf{P}\left(x(c+\delta) < \frac{S_{p_n}}{r_n} < x(d-\delta)\right) = \\
= \quad &\frac{1}{x^2} \ln \mathsf{P}(x(c+\delta) < Z < x(d-\delta)).
\end{aligned}$$

Доказательство

Отсюда, в силу произвольности δ, следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{m_n}{\alpha_n^2} \ln \mathsf{P}\left(c < \frac{S_{m_n}}{\alpha_n} < d\right) \geqslant \frac{1}{x^2} \ln \mathsf{P}(xc < Z < xd). \qquad (5.28)$$

Вспомогательные утверждения

Доказательство

Положим $c = b - \varepsilon$, $d = b + \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(xc < Z < xd) &= \mathsf{P}(|Z - xb| < \varepsilon x) = \int\limits_{-\varepsilon x}^{\varepsilon x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-(t+xb)^2/2}\, dt = \\
&= e^{-x^2b^2/2} \int\limits_{-\varepsilon x}^{\varepsilon x} e^{-txb}\, \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dt = \\
&= \mathsf{P}(|Z| < \varepsilon x)\, e^{-x^2b^2/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-txb}\, p(t)\, dt, \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

где

$$p(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{I(|t| \leqslant \varepsilon x)}{\mathsf{P}(|Z| < \varepsilon x)}.$$

Доказательство

Очевидно, что $p(t)$ — плотность распределения (некоторой случайной величины Y), причём $\int\limits_{\mathbb{R}} tp(t)\,dt = 0$. Тогда, в силу выпуклости функции $g(t) = e^{-xbt}$, $t \in \mathbb{R}$, из неравенства Йенсена (1.6) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-txb}\,p(t)\,dt = \mathsf{E}e^{-xbY} = \mathsf{E}g(Y) \geqslant g(\mathsf{E}Y) = g(0) = 1.$$

Подставляя эту оценку в (5.29), приходим к неравенству

$$\mathsf{P}(|Z - xb| < \varepsilon x) \geqslant e^{-x^2b^2/2}\,\mathsf{P}(|Z| < \varepsilon x).$$

Доказательство

Отсюда получаем

$$\frac{1}{x^2}\ln \mathsf{P}(|Z - xb| < \varepsilon x) \geqslant -\frac{b^2}{2} + \frac{1}{x^2}\ln \mathsf{P}(|Z| < \varepsilon x),$$

и, следовательно,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\ln \mathsf{P}(|Z - xb| < \varepsilon x) \geqslant -\frac{b^2}{2}.$$

Доказательство

Значит, для любого $\eta > 0$ мы можем выбрать x_0 настолько большим, что для всех $x \geqslant x_0$

$$\frac{1}{x^2} \ln \mathsf{P}(|Z - xb| < \varepsilon x) \geqslant -\frac{b^2}{2} - \eta.$$

Теперь из (5.28) следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{m_n}{\alpha_n^2} \ln \mathsf{P}(|S_{m_n}/\alpha_n - b| < \varepsilon) \geqslant -\frac{b^2}{2} - \eta,$$

что и доказывает лемму. □